Ронжина Е.В., учитель математики

ГБОУ школа№356 Московского района

Санкт-Петербурга

Методическая разработка «Решение задач на оптимизацию»

Конспект занятия в 10-м классе

Тема урока: Задачи на оптимизацию.

Тип урока: урок открытия нового знания**.**

Цели и задачи урока:

1) дать учащимся представление о задачах на оптимизацию;

2) привести примеры задач;

3) научиться решать задачи.

Планируемые образовательные результаты:

- *предметные* – представление о задачах на оптимизацию;
- *метапредметные* – умение выделять общее;
- *личностные* – сознательное освоение изученного материала.

Оборудование: персональный компьютер (ПК) учителя, мультимедийный проектор, экран; ПК учащихся.

Ход урока

I. Мотивационно-целевой этап

1.1 Организационный момент

Здравствуйте, проверьте свою готовность к уроку, садитесь.

Для начала запишем задание на дом: просмотреть лекцию и решить задачи на сайте.

Учитель: Наши цели и задачи на сегодняшний день.

1) узнать о способах представления задач на оптимизацию;

2) научиться решать задачи.

II. Процессуально - познавательный этап

2.1 Открытие нового знания.

Учитель: Не так давно в вариантах ЕГЭ появились текстовые задачи, в которых необходимо найти наименьшее или наибольшее значение некоторой величины. При решении большинства этих задач применяется производная. Для их решения нужно:

1. Составить функцию, которую необходимо оптимизировать.

2. Найти ее производную.

3. Приравнять к нулю, чтобы выявить критические точки. В них функция принимает наименьшее или наибольшее значения.

4. Подставив найденные значения в функцию, получим ответ задачи.

Рассмотрим примеры решения некоторых из них.

Задача 1. В двух шахтах города Норильска добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на металлургический завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести **наибольшее** количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение:

		Количество рабочих	**Добыча за час**
1 шахта	никель	x	3x
	алюминий	100-x	1·(100-x)
2 шахта	никель	y	1y
	алюминий	300-y	3·(300-y)

Так как в промышленности для сплава нужно в 2 раза больше алюминия, чем никеля, и на обоих шахтах работают по 5 часов в день, то 5(1·(100-x)+3·(300-

y))=5(2(3x+1y)). После преобразований получим: y=200-1,4x. Функция выпуска сплава m(x,y)=5(3x+(100-x)+y+3(300-y)). Подставим y, тогда m(x)=3000+24x. Поскольку x≤100, то максимальное значение m(x)=5400 достигается при x=100

Ответ: 5400 кг сплава будет ежедневно выпускать промышленность.

Задача 2. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение: В первой области 50 рабочих отработают 500 часов в сутки. Пусть z человек выпускают алюминий. Количество металла, выпущенное в первой области $z \cdot 0{,}2 + (500 - z) \cdot 0{,}1$ кг.

А во второй области так же 500 человеко-часов и по условию задачи

$x^2 + y^2 = 500$, т.е. $x^2 = 100$, $y^2 = 400$;

$x = 10$, $y = 20$.

10 кг алюминия и 20 кг никеля добывают во второй области.

Так как никеля выпускают в 2 раза больше,

то $2(0{,}2z + 10) = 50 - 0{,}1z + 20$,

$0{,}4z + 20 = 70 - 0{,}1z$,

$0{,}5z = 50$,

$z = 100$.

$S(z) = 0{,}2z + 50 - 0{,}1z + 30$.

$S(100) = 0{,}2 \cdot 100 + 50 - 0{,}1 \cdot 100 + 30 = 20 + 50 - 10 + 30 = 70 + 20 = 90$.

Ответ: 90 кг сплава сможет произвести завод за сутки.

Задача 3. В январе 2014 года ставка по депозитам в банке «ВТБ» составляла x % годовых, тогда как в январе 2015 года — y % годовых, причем известно, что x+y=30%. В январе 2014 года вкладчик открыл счет в банке «ВТБ», положив на него некоторую сумму. В январе 2015 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2016 года станет максимально возможной.

Решение: Пусть 1-первоначальный вклад. Тогда через год при x % годовых на счету окажется сумма 1·(1+0,01x). Далее вкладчик снимает со счета пятую часть первоначальной суммы. То есть на счету оказывается сумма 1+0,01x-0,2=0,8+0,01x. В банке меняется процентная ставка и составляет теперь y %, т.е (30-x) %. Тогда еще через год у вкладчика на счету окажется сумма (0,8+0,01x)(1,3-0,01x). Нас интересует значение x, при котором значение f(x) =(0,8+0,01x)(1,3-0,01x) будет максимальным. Исследуем данную функцию методами математического анализа или максимальное значение функция f(x) примет в точке x0 (вершина параболы), то есть в точке x_0 =25.

Ответ: 25%.

Задача 4. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение: Пусть стандартных номеров –x, а номеров «люкс» -y. Тогда общая площадь будет: 21x+49y=1099 кв. метров. В сутки можно заработать: 2000x+4500y рублей и эта сумма должна быть наибольшей. Из первого уравнения выразим y и подставим в выражение 2000x+4500y. получим функцию заработанных в сутки денег: $f(x)=2000x+4500\cdot\frac{1099-21x}{49}$. После преобразований

получим: f(x)= $\frac{500x-706500}{7}$. Она должна принимать наибольшее значение. Т.к. x и y –натуральные числа, и функция f(x)- возрастающая, то она принимает наибольшее значение при наибольшем значении x. Легко заметить, что выражение $\frac{1099-21x}{49} = \frac{157-3x}{7}$. будет целым, если x=50, тогда f(x) = $\frac{500\cdot 50+706500}{7}$ = 104500 (рублей).

Ответ: 104 500 рублей в сутки сможет заработать предприниматель на своем отеле.

Задача 5. В поселке «Черная Речка» фермер выращивает картофель и свеклу на двух полях, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать обе культуры, и поля можно делить между ними в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц /га, а на втором – 200ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: Пусть x га на первом поле отводится под свеклу, а (10 – x) га отводится под картофель. С первого поля собирают 300(10 – x) ц картофеля и 200x ц свеклы. Пусть y га на втором поле отводится под свеклу, а (10 – y) га отводится под картофель. Со второго поля собирают 200(10 · y) ц картофеля и 300 y ц свеклы Прибыль с первого поля (30 000 000 – 3 000 000x + 2 600 000x) руб., а прибыль со второго поля (20 000 000 – 2 000 000y + 3 900 000y) руб. Функция прибыли с двух полей S (x; y) = 1 900 000y – 400 000x + 50 000 000.

Наибольшее значение функции принимает при x = 0, а y = 10, тогда прибыль составит 69 000 000 руб.

Ответ: 69 000 000 рублей наибольший доход фермера.

Задача 6.Строительство цеха по производству вентиляционных труб стоит 39 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции в этом цехе равны $0{,}5x^2+4x+19$ млн. руб.в год. Если продукцию продать по цене a тыс. руб.за единицу, то прибыль фирмы (в млн. руб.) за один год составит $ax-(0{,}5x^2+4x+19)$. Когда цех будет построен, фирма «Дальвент» станет выпускать продукцию в

таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении а строительство цеха окупится не более, чем за три года?

Решение: За три года прибыль составит: $3(ax-(0,5x^2+4x+19))$.Т.к. за это время должно окупиться строительство нового цеха, то эта прибыль должна быть не менее 39 млн. руб. Т.е. $3(ax-(0,5x^2+4x+19)) \geq 39$. Выразим из этого неравенства а. После преобразований получим: $a \geq 0,5x+4+\frac{32}{x}$. Наименьшее значение $a=0,5x+4+\frac{32}{x}$. Будем находить это значение через производную.

$(0,5x+4+\frac{32}{x})'=0,5-\frac{32}{x^2}$. Найдем критическую точку: $0,5-\frac{32}{x^2}=0$. Отсюда $x=8$ (отрицательное значение не берем, т.к. x - натуральное число). Вычислим наименьшее значение $a = 0,5\cdot 8+4+\frac{32}{8} = 12$.

Ответ: a=12.

Задача 7. В Хабаровске и в Благовещенске работают заводы по изготовлению кирпичей. В 2015 году на заводе в Хабаровске установили современное оборудование, поэтому рабочие этого завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю и выпускают при этом 2t единиц продукции. Рабочие в Благовещенске трудятся суммарно t^2 часов, но выпускают t единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего на обоих заводах составляет 500 рублей в час. А общая плата рабочим обоих заводов составляет 30250000 рублей в неделю. Какое максимальное количество единиц продукции в неделю могут выпускать оба завода?

Решение:

	Суммарное количество часов	**Объем продукции**
Завод в Благовещенске	X^2	X
Завод в Хабаровске	$У^2$	2У
Оба завода вместе	$X^2+У^2$	X+2У

1. Общая плата рабочим в неделю составит: $500(X^2+У^2) =30250000$. Или $X^2+У^2 = 60500$. (Таким образом, найдены ограничения на x и y)

2. Из этого уравнения выразим y. У $=\sqrt{60500-x^2}$ и подставим в выражение: x+2y. Т.к. объем продукции должен быть максимальным, то необходимо найти при каком значении x, значение функции f(x)= x+2 $\sqrt{60500-x^2}$принимает наибольшее значение.

3. Для этого найдем производную данной функции. Она равна:

f '(x)= $\left(x+2\sqrt{60500-x^2}\right)' = 1-\frac{2x}{\sqrt{60500-x^2}}$

4. Приравняем к нулю и найдем точку максимума.

$1-\frac{2x}{\sqrt{60500-x^2}}=0$. После вычислений получим x = 110. Тогда y = 2· 110 = 220.

5. Вычислим максимальный объем продукции за неделю:

110+2·220=550

Ответ: 550 единиц товара.

Задача 8. В бассейне проведены три трубы. Первая труба наливает 20 м3 воды в час, вторая труба наливает в час на 2z м3меньше, чем первая (0<z <10)? Третья труба наливает в час на 10z м3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 20% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,8 будет налит бассейна. При каком значении z бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Решение: Примем объем бассейна за 1

	Работа (A)	**Время(t)**	**Производительность(v) в м^2**
1 труба			20
2 труба			20-2z
3 труба			20+10z
1 и 2 вместе		$\frac{0,2}{40-2z}$	20+(20-2z)=40-2z
1, 2 и 3 вместе		$\frac{0,8}{60+8z}$	20+(20-2z)+(20+10z)=60+8z

Весь бассейн будет налит за $\frac{0,2}{40-2z}+\frac{0,8}{60+8z}$часов. Задача сводится к нахождению такого значения z, при котором значение функции t(z) = $\frac{0,2}{40-2z}+\frac{0,8}{60+8z}$, 0<z<10 будет наименьшим.

t'(z) = $0,4/((40-2z)^2-6,4/((60+8z)^2=\frac{0,4(60+8z)^2-6,4(40-2z)^2}{(40-2z)(60+8z)}$

t'(z) = 0, $\frac{0,4(60+8z)^2-6,4(40-2z)^2}{(40-2z)(60+8z)}=0$

$$0,4(60+8z)^2-6,4(40-2z)^2=0$$

(40-2z)(60+8z)≠0

0<z<10

После вычислений получим: z=6,25- точка минимума. 0<6,25<10.

Ответ: за 6,25 часа бассейн наполнится быстрее всего.

2.2 Первичное закрепление материала

Используя полученные знания решим задачи.

Задача 1. В лагерь 81 ребенка везут двумя автобусами по 40 и41 ребенку соответственно. Каждому ребенку в дорогу полагается ровно 1 пирожок. Имеется 38 пирожков с вишней и 43 пирожка с курагой. Как нужно распределить пирожки по автобусам, чтобы процентные содержания пирожков с вишней в автобусах (относительно общего количества пирожков в каждом автобусе) отличались минимально?

Решение: Пусть в первый автобус с количеством детей 40 человек нужно отдать x пирожков, тогда во второй автобус отдаем 38-x пирожков. В процентном отношении пирожки по автобусам распределяются следующим образом: в первом автобусе -$\frac{x}{81}$ ·100%; а во втором: $\frac{38-x}{81}$·100%. По условию процентные содержания пирожков отличаются минимально. Следовательно необходимо найти минимальное значение функции: f(x)= $\frac{x}{81}$·100% - $\frac{38-x}{81}$·100%.

f(x)= $\frac{100x-100(38-x)}{81}=\frac{200x-3800}{81}$. Данная функция возрастающая, поэтому свое наименьшее значение она принимает при минимальном x. Т.к. x – натуральное число, то x=19.

Ответ: в первый автобус нужно отдать 19 пирожков с вишней.

Задача 2. Банк планирует на один год вложить 20% имеющихся у него средств клиентов в проект А, а остальные 80% - в проект В. В зависимости от обстоятельств проект А может принести прибыль в размере от 27% до 32% годовых, а проект В – от 37% до 42% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться от 15% до 20% годовых. Определите, какую наибольшую и какую наименьшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты А и В может при этом получить банк.

Решение: Пусть N- сумма вложений, а процентная ставка по вкладам, начисляемая банком равна а. Тогда в конце года банк должен выплатить клиентам: $V=N(1+\frac{a}{100})$

	Вложено в проект	Доходы банка (P)	Выплаты клиентам (V)	Чистая прибыль банка (P-V)
A	0.2N	от 1,27(0,2N) до ,32(0,2N)		
B	0.8N	от 1,37(0,8N) до ,42(0,8N)		
A+B		от 1,35N до 1,4	от 1.15 до 1,2N	

Чистая прибыль банка равна разности доходов и выплат клиентам, т.е. P-V, а чистая прибыль в процентах от вложений равна $\frac{P-V}{N}\cdot 100\%$. Получим: $1{,}35\leq \frac{P}{N}\leq 1{,}4$; $1{,}15\leq\frac{V}{N}\leq 1{,}2$ (умножим на -1), получим:

$-1{,}2 \leq -\frac{V}{N}\leq -1{,}15$. Сложив почленно оба неравенства, получим:

$0{,}15 \leq \frac{P-V}{N}\leq 0{,}25$; $15\% \leq \frac{P-V}{N}\cdot 100\% \leq 25\%$

Ответ: наименьшая прибыль банка 15%, наибольшая 25%

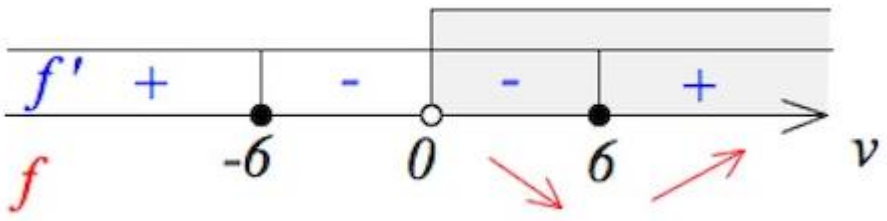
Задача 3. Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью *v* км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение *v*, при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

Решение.

Алексей (выйдя из до со скоростью v км/ч) на путь 6 км потратил $\frac{6}{v}$ часов. Пусть после этого до встречи с Жучкой прошёл ещё x км, на что ушло $\frac{x}{v}$ часов. За тоже время $\left(\frac{x}{v} ч\right)$ Жучка пробежала $6+x$ км со скоростью $v+9$ км/ч. Тогда $\frac{x}{v} = \frac{6+x}{v+9}$, откуда $x = \frac{2v}{3}$. Время прогулки Алексея, с учётом того, что вместе с Жучкой они возвращались домой со скоростью 4 км/ч, составило, таким образом, $\frac{6}{v} + \frac{x}{v} + \frac{6+x}{4}$ часов $\left(или\ \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{9+v}{6}\ часов\right)$.[12]

Рассмотрим функцию $f(v) = \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{9+v}{6}$ и найдем v, при котором функция принимает наименьшее значение (а также само наименьшее значение).

$$f'(v) = -\frac{6}{v^2} + \frac{1}{6} = \frac{v^2 - 36}{6v^2}$$



$v = 6$ - точка минимума, в ней и достигается наименьшее значение функции.

$f(6) = \frac{6}{6} + \frac{2}{3} + \frac{9+6}{6} = 4\frac{1}{6}(ч)$.

Ответ: 6 км/ч, 4 часа 10 минут.

Задача 4. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго типа. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Решение: На один большой дом требуется 150 и 200 деталей первого и второго типа. Для двух маленьких домов требуется 140 = 70·2 и 200 = 100·2

деталей. Таким образом, деталей хватит, и 10 деталей первого типа останется. Для того, чтобы квартир оказалось больше, бригада вместо большого дома построит два маленьких. $2 \cdot 12 > 21$.

Для двух средних домов потребуется $220 = 110 \cdot 2$ и $300 = 150 \cdot 2$ деталей. Для трёх маленьких домов требуется $210 = 70 \cdot 3$ и $300 = 100 \cdot 3$ деталей. И снова деталей хватит, и опять 10 деталей первого типа останется. Для того, чтобы квартир оказалось больше, бригада вместо двух средних домов построит три маленьких. $3 \cdot 12 > 2 \cdot 16$. Итак, большие дома строить нецелесообразно, а средних домов может быть максимум один, так как каждые два строители заменят тремя маленькими. Исходя из условия задачи, можно составить систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x + 11y + 15z \leq 90 \\ 2x + 3y + 4z \leq 26 \end{cases}$$

Здесь x, y и z - число маленьких, средних и больших домов соответственно. Если нет ни средних, ни больших, то деталей хватит лишь на 12 маленьких. В итоге квартир получится $12 \cdot 12 = 144$. Однако, один маленький можно заменить на один средний ($x = 11$, $y = 1$). Число домов не изменится, но число квартир увеличится $11 \cdot 12 + 16 = 148$.

Ответ: 11 маленьких и 1 большой

III. Рефлексивно-оценочный этап

3.1 Подведение итогов урока, рефлексия

Давайте вместе с Вами подведём итоги нашего занятия.

Занятие для меня показалось…

За занятие я…

Мое настроение…

Материал занятия мне был…

Выставление оценок.